2.8.15 Vyšší mocniny

Předpoklady: 020812

Př. 1: Doplň místo obdélníčků správné číslo.

a) $(-2)^3 = \square$ b) $\square^2 = 0,64$ c) $(-40)^{\square} = 1600$

d) $\square^3 = -0,000027$ e) $(-25)^2 = \square$ f) $(-2)^{\square} = 8$

a) $(-2)^3 = -8$ b) $0,8^2 = 0,64$ c) $(-40)^2 = 1600$

d) $(-0,03)^3 = -0,000027$ e) $(-25)^2 = 625$ f) $(-2)^{\square} = 8$ nejde, protože $(-2)^3 = -8$

Př. 2: Najdi všechna čísla, která můžeme dosadit místo písmene *x*, aby platilo:

a) $(-1)^x = -1$ b) $(-0,8)^x > 0$ c) $x^3 > x^2$

a) $(-1)^x = -1 \Rightarrow$ násobíme mezi sebou $(-1) \Rightarrow$ můžeme získat -1 nebo 1, podle toho, kolikrát (-1) násobíme, záporné číslo získáme, když násobíme lichý počet čísel $\Rightarrow$ x je liché číslo.

b) $(-0,8)^x > 0 \Rightarrow$ opačný případ než v minulém bodu, chceme, aby výsledek byl kladný $\Rightarrow$ musíme násobit sudý počet záporných čísel $\Rightarrow$ x je sudé číslo.

c) $x^3 > x^2 \Rightarrow x^2$ je nezáporné číslo $\Rightarrow x^3$ musí být také nezáporné $\Rightarrow x$ je kladné. Platí $x^3 = x \cdot x^2 \Rightarrow x^2$ musíme násobit číslem větším než 1 $\Rightarrow x > 1$.

V matematice se používají i vyšší mocniny než třetí. Využití vyšších mocnin v běžné praxi není tak časté, většinou se využívají vyšší mocniny pouze u dvojky a desítky.

Př. 3: Zdůvodni, proč se v normálním životě používají vyšší mocniny daleko méně než mocniny druhé a třetí.

Neexistuje "čtyřrozměrný objem" svět má pouze tři rozměry, ve kterých můžeme určovat plochy (druhá mocnina) nebo objemy (třetí mocnina).

Dodatek: Podle části dnešních fyziků není odpověď na předchozí otázku pravdivá, protože nás svět má rozměrů více, ale některé z nich jsou pro nás zatím nepozorovatelné. Naštěstí provádění výpočtů ve více rozměrech není příliš odlišné od výpočtů ve třech rozměrech.

Př. 4: Doplň tabulku s mocninami dvojky.

n	1	2	3		5		7	8	9	10
2^n				16		64				

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Pedagogická poznámka: Značná část žáků má problém s pochopením tabulky. Nejdřív jim vyplním jeden ze sloupců, pak si procházíme první sloupec se zadáním s bavíme se, co řádky znamenají.

Př. 5: Kde jsi se již setkal s čísly, která jsi spočítal do druhého řádku?

U počítačů. Čísla se v počítačích převádějí do tvaru zapsaného pomocí mocnin dvojky.
Pomocí mocnin dvojky se také vyjadřují množství paměti nebo velikosti disků.
http://www.alza.cz/pameti/prenosne-flashdisk/18842861.htm
http://www.czc.cz/pevne-disky/produkty.

Př. 6: Co je zajímavého na čísle 2048? Proč se ve hře podle něj pojmenované vyskytují pouze mocniny dvojky?

$2048 = 2^{11}$

Ve hře se sčítají dvě stejná čísla $\Rightarrow$ sečtením dvou jedniček získáme dvojku, sečtením dvou dvojek čtyřku a tak dále $\Rightarrow$ sečtením dvou stejných mocnin dvojky získáme větší mocninu dvojky.

Př. 7: Zapiš mocniny desítky jako mocninu (například $10\,000 = 10^4$). Zformuluj postup, jak tato čísla přepsat do tvaru mocniny deseti.
a) 1000 b) 100 000 c) 10 d) 10 000 000 000 e) 10 000 000

a) $1000 = 10^3$ b) $100\,000 = 10^5$ c) $10 = 10^1$

d) $10\,000\,000\,000 = 10^{10}$ e) $10\,000\,000 = 10^7$
Velikost mocnitele (exponentu) je dána počtem nul v čísle.

Př. 8: Zapiš mocniny normální číslem. Čísla přečti.
a) 10^3 b) 10^6 c) 10^9 d) 10^7

a) $10^3 = 1000$ - tisíc

b) $10^6 = 1\,000\,000$ - milión

c) $10^9 = 1\,000\,000\,000$ - miliarda

d) $10^7 = 10\,000\,000$ - deset miliónů

Př. 9: Vypočti.

a) $(-2)^5$ b) $(-1)^8$ c) 3^5 d) $(-1)^{2014}$

e) $0{,}1^5$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ g) 20^6 h) $0{,}3^4$

a) $(-2)^5=-32$ b) $(-1)^8=1$ c) $3^5=243$

d) $(-1)^{2014}=1$ (sudý mocnitel) e) $0{,}1^5=0{,}00001$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

g) $20^6=64\,000\,000$ h) $0{,}3^4=0{,}0081$

Př. 10: Doplň a dokaž vzorce.

a) $(a\cdot b)^n=$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

a) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

Důkaz: $(a\cdot b)^n=\underbrace{(a\cdot b)(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{\text{závorka se opakuje } n\text{-krát}}=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-krát}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{-krát}}=a^n\cdot b^n$.

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Důkaz: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\text{-krát}}=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{-krát}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{-krát}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{-krát}}}=\frac{a^n}{b^n}$.

Pedagogická poznámka: Žáci důkaz samostatně neprovedou, ale na tabuli ho píšu. Část z nich tak podle bodu a) udělá alespoň bod b).

Př. 11: Vypočti.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^4$ b) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ c) $\left(\sqrt{5}\right)^6$ d) $\left(\sqrt[3]{10}\right)^9$

a) $\left(\sqrt{2}\right)^4=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\cdot 2=4$

b) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}=3\cdot 3=9$

c) $\left(\sqrt{5}\right)^6=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5\cdot 5\cdot 5=125$

d) $\left(\sqrt[3]{10}\right)^9=\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{10}=10\cdot 10\cdot 10=1000$

I k vyšším mocninám existují odpovídající odmocniny. Počítáme s nimi stejně jako s druhými nebo třetími odmocninami.

Př. 12: Vypočti. Svůj výsledek zdůvodni.

a) $\sqrt[4]{10000}$ b) $\sqrt[5]{0,00001}$ c) $\sqrt[4]{81}$ d) $\sqrt[5]{32}$

e) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$ f) $\sqrt[4]{160\,000}$ g) $\sqrt[5]{0,00032}$ h) $\sqrt[4]{0,0000\,0256}$

a) $\sqrt[4]{10000}=10$, protože $10^4=10\,000$. b) $\sqrt[5]{0,00001}=0,1$, protože $0,1^5=0,000\,01$.

c) $\sqrt[4]{81}=3$, protože $3^4=81$. d) $\sqrt[5]{32}=2$, protože $2^5=32$.

e) $\sqrt[6]{1\,000\,000}=10$, protože $10^6=1000\,000$

f) $\sqrt[4]{160\,000}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{10\,000}=2\cdot 10=20$

g) $\sqrt[5]{0,00032}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{0,00001}=2\cdot 0,1=0,2$

h) $\sqrt[4]{0,000\,002\,56}=\sqrt[4]{256}\cdot\sqrt[4]{0,000\,000\,01}=4\cdot 0,01=0,04$

Př. 13: O vynálezci šachů se traduje zajímavá legenda. Když se s jeho vynálezem seznámil tehdejší čínský císař, novou hru si velice zamiloval. Pozval proto vynálezce k sobě a nabídl mu jako odměnu cokoliv, si bude přát. Vynálezce se chvíli zamyslel a pak požádal císaře o trochu rýže. Šachovnice má 64 polí. Za první políčko chtěl dostat jedno zrnko rýže, za druhé dvě zrnka rýže, za třetí čtyři zrnka, za čtvrté osm zrnek a tak dále. Za každé další políčko chtěl dvojnásobný počet zrníček než za políčko předchozí. Císař byl velmi udiven jeho skromností a nabízel mu cennější odměnu. Odhadni počet zrníček, které vynálezce po císaři žádal. Kolik by to bylo kg? Urči počet zrníček výpočtem. Urči jejich hmotnost v kg. Potřebné údaje najdi na internetu.

Počty zrnek na jednotlivých políčkách: 1, 2, , 8, 16, … $\Rightarrow$ postupně o mocniny čísla 2 $\Rightarrow$ na posledním políčku bude 2^{63} zrnek rýže.
Počet zrnek na ostatních políčkách dohromady bude jen o jedno zrno menší než počet zrnek na posledním políčku (kdybychom jedno zrnko přidali na první pole, byly by tam dvě zrnka, spolu se zrnky na druhém poli bychom měli čtyři zrnka, spolu se zrnky na třetím poli osm zrnek $\Rightarrow$ vždy bychom měli na políčkách od počátku dohromady stejně jako na následujícím políčku) $\Rightarrow$ na prvních 63 polích je dohromady $2^{63}-1$ zrnek rýže.

Počet zrnek na všech polích dohromady: $2^{63}+2^{63}-1=2\cdot 2^{63}-1=2^{64}-1\doteq 1,8\cdot 10^{19}$.

1 kg rýže obsahuje přibližně 30 000 zrnek $\Rightarrow$ hmotnost zrnek v kg: $\dfrac{1,8\cdot 10^{19}}{30000}=6,1\cdot 10^{14}$ kg

Pro srovnání současná celosvětová roční produkce rýže je $5\cdot 10^{11}$ kg.

Pedagogická poznámka: Příklad je bonus pro nejlepší. K přibližnému odhadu stačí počet zrnek na posledním poli. Úvahu o sečtení počtů na ostatních polích neříkám rovnou, nejdříve nabídnu přidání jednoho zrna a odkážu na hru 2048.

Shrnutí: Mocniny i odmocniny vyšších řádů se chovají podobně jako druhého a třetího řádu.